ZESTAW I

(1) Niech S będzie dowolnym zbiorem, niech $l_f(S)$ będzie przestrzenią liniową funkcji $v : S \to \mathbb{R}$ o skończonym nośniku $\operatorname{supp} v = \{s : v(s) \neq 0\}$ i niech $\|v\| = \sum_{s \in S} |v(s)|$, dla $v \in l_f(S)$.

Pokazać, że $d(u,v) = \|u - v\|$ jest metryką na $l_f(S)$ i dla nieskończonego S znaleźć w przestrzeni $(l_f(S), d)$ domknięcie i wnętrze zbioru $A = \{v : \max_{s \in S} |v(s)| \leq |\operatorname{supp} v|\}$.

(2) Niech S będzie zbiorem mocy continuum i niech $(l_f(S), d)$ będzie przestrzenią metryczną opisaną w zadaniu 1.

(A) Niech d_e będzie metryką euklidesową w $\mathbb{R}^2$, $0 = (0,0)$ i niech $d_k : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określone formułą

$$d_k(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b) & \text{, jeśli } a, b \text{ i } 0 \text{ leżą na jednej prostej}, \\ d_e(a,0) + d_e(b,0) & \text{, w przeciwnym razie}. \end{cases}$$

Określić funkcję $\varphi : \mathbb{R}^2 \to l_f(S)$ taką, że $d_k(a,b) = d(\varphi(a), \varphi(b))$, dla $a, b \in \mathbb{R}^2$ i opisać kule w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_k)$.

(B) Niech $p(x,y) = (x,0)$, dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ i niech $d_r : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określone formułą

$$d_r(a,b) = \begin{cases} d_e(a,b) & \text{, jeśli } p(a) = p(b), \\ d_e(a,p(a)) + d_e(p(a),p(b)) + d_e(p(b),b), & \text{jeśli } p(a) \neq p(b). \end{cases}$$

Określić funkcję $\psi : \mathbb{R}^2 \to l_f(S)$ taką, że $d_r(a,b) = d(\psi(a), \psi(b))$, dla $a, b \in \mathbb{R}^2$ i opisać kule w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_r)$.

(C) Znaleźć punkty ciągłości przekształcenia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określonego wzorem $f(x,y) = (x, x^2)$

(i) z przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_k)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$,

(ii) z przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_r)$ w $(\mathbb{R}^2, d_k)$.

3. Niech $(C[0,1], d_{sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$ z metryką supremum

$$d_{sup}(f,g) = \sup\{|f(t)-g(t)| : t\in[0,1]\}.$$

(A) Znaleźć w tej przestrzeni metrycznej domknięcia i wnętrza zbiorów

$A=\{f\in C[0,1] : f(t)\geq 0 \text{ dla } t\in[0,1]\}$,

$B=\{f\in C[0,1] : f \text{ zeruje się w co najmniej dwóch punktach}\}$.

(B) Znaleźć zbiór punktów ciągłości przekształcenia

$$\phi(f)=\sup\{s\in[0,1] : f(s)=f(0)\}$$

z przestrzeni metrycznej $(C[0,1], d_{sup})$ w prostą euklidesową.

4. Niech $H\subset C[0,1]$ będzie zbiorem funkcji ściśle rosnących $f:[0,1]\xrightarrow[na]{}[0,1]$ i $d=d_{sup}|H\times H$ (zob. zadanie 3).

Pokazać, że metryka d na $H\times H$ jest prawostronnie niezmiennicza (tzn. $d(f,g)=d(f\circ h, g\circ h)$), metryka $\tilde{d}(f,g)=d(f^{-1},g^{-1})$ jest lewostronnie niezmiennicza i generuje w H tę samą topologię, co metryka d, ale nie istnieje w H dwustronnie niezmiennicza metryka generująca w H topologię identyczną z topologią generowaną przez d.

<u>Wskazówka</u>. Określić ciągi $f_n, g_n\in H$ takie, że $g_n\to id$, ale $f_n^{-1}\circ g_n\circ f_n \not\to id$.

5 Ustawmy w ciąg $q_1, q_2, \ldots$ liczby wymierne z $[0,1]$ i niech, dla $f, g \in C[0,1]$,

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(|f(q_n) - g(q_n)|, 1).$$

(A) Pokazać, że metryki d i d_{sup} (zob. zad. 3) generują w $C[0,1]$ różne topologie.

(B) Pokazać, że metryki $d|H \times H$ i $d_{sup}|H \times H$, gdzie H jest opisane w zadaniu 4, generują w H tę samą topologię.

6 Niech $\varphi: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ będzie różnowartościowym przekształceniem liczb wymiernych w liczby naturalne. Pokazać, że funkcja $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ określona, dla $a \neq b$, wzorem

$$d(a,b) = \sum \{ 2^{-\varphi(q)} : q \in [a,b] \}$$

jest metryką w $\mathbb{R}$, oraz w przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}, d)$,

$$a_n \to a \iff \begin{cases} a_n = a \text{ dla prawie wszystkich } n, \text{ jeśli } a \in \mathbb{Q}, \\ |a_n - a| \to 0, \text{ jeśli } a \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7 Będziemy utożsamiali zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ z odległością $d(z,w) = |z - w|$ z płaszczyzną euklidesową $(\mathbb{R}^2, d_e)$. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ będzie liczbą taką, że $\frac{\alpha}{\pi}$ jest niewymierne i niech $c = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Pokazać, że dla $A = \{(1 + \frac{1}{n})c^n : n = 1, 2, \ldots\}$, $\overline{A} = A \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

<u>Wskazówka</u>. Pokazać, że można wybrać liczby naturalne $n_1 < n_2 < \ldots$ tak, żeby $|c^{n_k} - 1| \to 0$. W tym celu zauważyć, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $n > m$ takie, że $\varepsilon > |c^n - c^m| = |c^{n-m} - 1|$.

8 Niech X będzie zbiorem niemalejących funkcji ciągłych $f:[0,1]\to[0,1]$ takich, że $f(0)=0$. Dla $f,g\in X$, niech $\delta(f,g)=\inf\{t\in[0,1]: f(t)\neq g(t)\}$ oraz $d(f,g)=1-\delta(f,g)$.

(A) Sprawdzić, że d jest metryką na X spełniającą warunek $d(f,g)\le\max\{d(f,h),d(g,h)\}$, dla $f,g,h\in X$

(B) Pokazać, że w przestrzeni metrycznej (X,d) wszystkie kule są niedomknięte[?] i każde dwie kule są albo rozłączne, albo jedna jest zawarta w drugiej.

(C) Znaleźć domknięcie i wnętrze zbioru $A=\{f\in X: f(1)\ge\frac{1}{2}\}$ w przestrzeni (X,d).

(D) Określmy $\varphi: X\to\mathbb{R}$ formułą $\varphi(f)=f(1)$. Znaleźć zbiór punktów ciągłości funkcji φ z przestrzeni metrycznej (X,d) w prostą euklidesową

9 Niech $(I^2,\mathcal{T}(\prec))$ będzie kwadratem leksykograficznym.

(A) Znaleźć domknięcie i wnętrze zbiorów

$A=\{(x,y)\in I^2: x$ jest wymierne i $y\in[1/3,2/3]\}$,

$B=\{(x,y)\in I^2: x$ jest niewymierne i $y\in[0,1/3]\}$

w przestrzeni topologicznej $(I^2,\mathcal{T}(\prec))$.

(B) Pokazać, że jeśli zbiór $A\subset I^2$ jest domknięty w przestrzeni $(I^2,\mathcal{T}(\prec))$, to jego rzut na pierwszą oś jest domknięty w topologii euklidesowej.

10 Niech $Y\subset X$ będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej $(X,\mathcal{T})$ i niech, dla $A\subset Y$, $\overline{A}^Y$ (odpowiednio, $\overline{A}^X$) będzie domknięciem A w przestrzeni $(Y,\mathcal{T}|Y)$ (odpowiednio w $(X,\mathcal{T})$). Pokazać, że $\overline{A}^Y=\overline{A}^X\cap Y$.

11 Punkt a w przestrzeni topologicznej $(X,\mathcal{T})$ jest punktem skupienia zbioru $A \subset X$, jeśli każde otoczenie a zawiera element zbioru A różny od a. Zbiór punktów skupienia A oznaczany symbolem A^d.

(A) Niech F będzie zbiorem domkniętym o pustym wnętrzu na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$. Wykazać, że istnieje $A \subset \mathbb{R} \setminus F$ taki, że $F = A^d$.

[Wskazówka. Z każdego przedziału $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$, gdzie n jest naturalne i m całkowite, przecinającego F, wybrać punkt a_{nm} spoza F i rozpatrzyć $A = \{a_{nm} : n = 1, 2, \ldots, m = \mp 1, \mp 2, \ldots\}$.]

(B) Niech $X = I \times \{0\}$ i niech $(X, \mathcal{T}(\preceq)|X)$ będzie podprzestrzenią kwadratu leksykograficznego $(I^2, \mathcal{T}(\preceq))$. Pokazać, że w przestrzeni $(X, \mathcal{T}(\preceq)|X)$, dla każdego nieprzeliczalnego $A \subset X$, $A^d \cap A \neq \emptyset$.

[Wskazówka. Założyć przeciwnie, zauważyć, że A jest wówczas sumą zbiorów $A_n = \{a \in A : (a - \frac{1}{n}, a) \times \{0\}$ nie przecina $A\}$, wybrać n takie, że A_n jest nieprzeliczalny i rozpatrzyć $a, b \in A_n$, dla których $0 < d_e(a,b) < \frac{1}{n}$.]

12 Niech, dla $X = \{(t, 4t(1-t)) : t \in]0,1[\}$, $(X, \mathcal{T}(\preceq)|X)$ będzie podprzestrzenią kwadratu leksykograficznego $(I^2, \mathcal{T}(\preceq))$.

Znaleźć podprzestrzeń $(Y, \mathcal{T}(d_r)|Y)$ przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^2, d_r)$ opisanej w zadaniu 2(B), homeomorficzną z $(X, \mathcal{T}(\preceq)|X)$.

Czy istnieje taka podprzestrzeń przestrzeni metrycznej opisanej w zadaniu 2(A)?

13 Niech $X_1 = \{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n,m = 1,2,\dots\}$,
$X_2 = \{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n,m = 1,2,\dots,\ m \geq n\}$,
$X_3 = \{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n = 1,2,\dots\} \cup \{(\frac{1}{n}, 1) : n = 1,2,\dots\}$
i niech $(X_i, \mathcal{T}(d_e)|X_i)$ będą podprzestrzeniami płaszczyzny euklidesowej. Które z tych trzech przestrzeni są ze sobą homeomorficzne?

14 Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i niech $W(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ będzie wykresem f, rozpatrywanym jako podprzestrzeń iloczynu kartezjańskiego $(X \times Y, \mathcal{T}_\Pi)$ przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(A) Pokazać, że przekształcenie $h(x) = (x, f(x))$ jest homeomorfizmem $(X, \mathcal{T}_X)$ na $(W(f), \mathcal{T}_\Pi | W(f))$.

(B) Niech $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie przestrzenią Hausdorffa, tzn. każde dwa punkty w Y mają rozłączne otoczenia. Pokazać, że zbiór $W(f)$ jest domknięty w $(X \times Y, \mathcal{T}_\Pi)$.

15 Niech $\mathbb{N}$ będzie zbiorem liczb naturalnych, rozpatrywanym z topologią podprzestrzeni prostej euklidesowej, niech $\mathbb{N}_n = \mathbb{N}$, dla $n = 1,2,\dots$ i niech

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \prod_n \mathbb{N}_n = \{(n_1, n_2, \dots) : n_i \in \mathbb{N}\}.$$

(A) Pokazać, że w iloczynie kartezjańskim $(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_n, \mathcal{T}_\Pi)$ topologia $\mathcal{T}_\Pi$ jest generowana przez metrykę d, która punktom $a=(n_1,n_2,\dots)$, $b=(m_1,m_2,\dots)$ przyporządkowuje odległość

$$d(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{\min\{i: n_i\neq m_i\}}, & \text{jeśli } a\neq b,\\ 0, & \text{jeśli } a=b.\end{cases}$$

(B) Niech $\succsim$ będzie porządkiem leksykograficznym w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: $(n_1,n_2,\dots)\succsim(m_1,m_2,\dots)$, jeśli dla pewnego i, $n_i<m_i$ oraz $n_j=m_j$ dla $j<i$.

Pokazać, że każdy zbiór domknięty F w ma element najmniejszy ze względu na $\succsim$, tzn. istnieje $a\in F$ takie, że $a\succsim u$ dla każdego $u\in F\setminus\{a\}$.

(C) Niech $c=(2,1,1,\dots)$. Pokazać, że dla kuli $B(c,\frac{1}{2})$ w przestrzeni $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}},d)$ nie istnieją $a\succsim b$ takie, że $c\in\{u: a\succsim u\succsim b\}\subset B(c,\frac{1}{2})$.

---

16. Przestrzeń topologiczna $(X,\mathcal{T})$ jest ośrodkowa, jeśli istnieje zbiór przeliczalny $A\subset X$ taki, że $\overline{A}=X$.

(A) Pokazać, że przestrzeń metryzowalna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy ma bazę przeliczalną.

(B) Pokazać, że przestrzeń $(C[0,1], d_{sup})$ jest ośrodkowa.

(C) Niech $\mathbb{R}_t=\mathbb{R}$, dla $t\in[0,1]$. Pokazać, że iloczyn kartezjański $\left(\prod_{t\in[0,1]}\mathbb{R}_t, \mathcal{T}_{\Pi}\right)$ prostych euklidesowych jest ośrodkowy, ale nie ma bazy przeliczalnej.

(D) Pokazać, że jeśli przestrzeń metryzowalna jest ośrodkowa, to każda jej podprzestrzeń jest ośrodkowa.

(E) Niech, dla $s \in [0,1]$, $\chi_s : [0,1] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość 1 w s i zero w pozostałych punktach $[0,1]$. Pokazać, że dla $Y = \{\chi_s : s \in [0,1]\} \subset \prod_{t \in [0,1]} \mathbb{R}_t$ podprzestrzeń $(Y, \mathcal{T}_\Pi | Y)$ nie jest ośrodkowa.

---

17 (A) Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią z bazą przeliczalną. Pokazać, że dla każdej rodziny zbiorów otwartych $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ istnieje rodzina przeliczalna $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ taka, że $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$.
[Wskazówka: Ustalić bazę przeliczalną $\mathcal{B}$ topologii $\mathcal{T}$. Dla każdego $B \in \mathcal{B}$, jeśli istnieje $U \in \mathcal{U}$ zawierający B, przyjąć $U(B) = U$, lub przyjąć $U(B) = \emptyset$, w przeciwnym razie. Rozpatrzyć $\mathcal{V} = \{U(B) : B \in \mathcal{B},\ U(B) \neq \emptyset\}$.]

(B) Pokazać, że jeśli przestrzenie topologiczne $(X_n, \mathcal{T}_n)$ mają przeliczalne bazy, to ich iloczyn kartezjański $(\prod_n X_n, \mathcal{T}_\Pi)$ też ma przeliczalną bazę.

(B) Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie podprzestrzenią kwadratu leksykograficznego, określoną w zadaniu 11(B); niech $(X \times X, \mathcal{T}_\Pi)$ będzie iloczynem kartezjańskim tej przestrzeni i niech $U_t = (0,t] \times (0,1-t]$, $t \in (0,1)$. Pokazać, że $\mathcal{U} = \{U_t : t \in (0,1)\} \subset \mathcal{T}_\Pi$, ale dla dowolnej rodziny przeliczalnej $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\bigcup \mathcal{V} \neq \bigcup \mathcal{U}$.
[Wskazówka. Zauważyć, że dla $S = \{(t, 1-t) : t \in (0,1)\}$, $S \cap U_t = \{(t, 1-t)\}$.]